On considère un nombre réel strictement positif c et deux points F_1, F_2 dont la distance est égale à $2c$. On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble (L) des points M du plan tels que $MF_1.MF_2 = c^2$.

Dans toute la suite, on supposera le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ choisi de manière telle que les points F_1, F_2 aient pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ et on pose pour tout nombre réel θ :

$$\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{v}(\theta) = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}.$$

PARTIE I : Etude et construction de l'ensemble (L)

1°) Equations cartésienne et polaire de (L)

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x, y)$ appartienne à (L).

b) En déduire, si on pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ avec $r \geq 0$, que M appartient à (L) si et seulement si $r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ où θ désigne un nombre réel variant dans un domaine à préciser et a une constante qu'on exprimera en fonction de c.

Dans la suite de cette partie, on notera $M(\theta)$ le point de (L) défini par : $\overrightarrow{OM}(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\ \vec{u}(\theta)$.

2°) Etude et construction de (L)

a) Calculer le vecteur-dérivé à (L) au point $M(\theta)$ et en déduire l'expression des deux vecteurs unitaires tangent et normal $\vec{T}(\theta)$ et $\vec{N}(\theta)$ au point $M(\theta)$ dans les bases $(\vec{u}(\theta),\ \vec{v}(\theta))$, puis $(\vec{i}, \vec{j})$.

b) Etudier les symétries de (L) et expliquer pour quelles raisons il suffit d'étudier (L) pour $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Donner des équations des tangentes à (L) aux points de paramètres $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/4$, puis représenter graphiquement la courbe (L).

c) Donner une mesure $\phi(\theta)$ de l'angle orienté $(\vec{i},\ \vec{T}(\theta))$ et préciser la courbure à (L) au point $M(\theta)$. En quels points celle-ci est-elle maximale? minimale?

3°) Aire délimitée par (L) et longueur de (L)

a) Déterminer en fonction de a l'aire du domaine intérieur à la courbe (L).

b) Montrer que la longueur l de (L) est donnée par l'intégrale suivante :

$$l = 2a\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)}}.$$

4°) Etude de la courbe inverse de (L)

On appelle inversion de pôle O et de rapport a^2 la transformation du plan privé de O dans lui-même associant au point $M \neq O$ de coordonnées polaires $(r,\ \theta)$ le point M' de coordonnées polaires $(a^2/r,\ \theta)$. On note (L') l'ensemble-image de (L) par cette inversion, autrement dit l'ensemble des transformés M' des points M de (L) par cette inversion.

a) Déterminer les transformés F_1', F_2' des points F_1, F_2 par cette inversion, puis reconnaître et écrire l'équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que $|\,MF_1' - MF_2'\,| = 2a$.

b) Déterminer des équations polaire et cartésienne de (L'), puis reconnaître (L').

PARTIE II : Détermination de la longueur *l* de (L)

On considère dans cette partie les deux fonctions des variables réelles p, q définies par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt \quad ; \quad \mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}(\cos(\theta))^{2p-1}(\sin(\theta))^{2q-1}d\theta.$$

1°) La fonction Gamma d'Euler

a) Pour quelles valeurs de p la fonction $t \to e^{-t}\,t^{p-1}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

b) Pour ces valeurs de p, exprimer $\Gamma(p+1)$ en fonction de p et $\Gamma(p)$.

2°) La fonction Bêta d'Euler

a) Pour quelles valeurs de p, q la fonction $\theta \rightarrow (\cos(\theta))^{2p-1}(\sin(\theta))^{2q-1}$ est-elle intégrable sur $]0, \pi/2[$?

b) Pour ces valeurs de p et q, établir que $B(p, q) = B(q, p)$.

c) A l'aide d'un changement de variable convenable, établir que :

$$B(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = B(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) = \int_0^{+\infty} \frac{4u^2 du}{u^4+1}.$$

A l'aide de l'égalité $\frac{4u^2}{u^4+1} = \frac{u\sqrt{2}}{u^2-u\sqrt{2}+1} - \frac{u\sqrt{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}$, calculer $B(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) = B(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$.

d) A l'aide d'une intégration par parties convenable, établir que :

$$B(p, q) = \frac{p+q}{q}B(p, q+1) = \frac{p+q}{p}B(p+1, q).$$

(On pourra remarquer à cet effet l'égalité $(\cos(\theta))^{2p-1}(\sin(\theta))^{2q-1} = (\cos(\theta))^{2p+2q}(\tan(\theta))^{2q-1}\frac{1}{\cos^2(\theta)}$).

c) En déduire enfin la relation :

$$B(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{pq}B(p+1, q+1).$$

3°) Relation entre les fonctions Bêta et Gamma

Pour tout nombre réel positif R, on considère les parties suivantes du quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$:

$$P(R) = \{ (x, y) / 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R \} \quad ; \quad C(R) = \{ (x, y) / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2 \}.$$

Pour tout couple (p, q) de nombres réels supérieurs ou égaux à 1/2, on considère la fonction continue f des deux variables x, y définie sur le quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$ par :

$$f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)x^{2p-1}y^{2q-1}.$$

a) Exprimer $\lim_{R\to+\infty}\iint_{P(R)} f(x,y)dxdy$ en fonction de $\Gamma(p)$ et $\Gamma(q)$.

b) Effectuer un passage en coordonnées polaires dans l'intégrale double $\iint_{C(R)} f(x,y)dxdy$.

En déduire $\lim_{R\to+\infty}\iint_{C(R)} f(x,y)dxdy$ en fonction de $\Gamma(p+q)$ et $B(p, q)$.

c) Représenter sur une même figure les parties $P(\frac{R}{\sqrt{2}})$, $C(R)$, $P(R)$, puis justifier l'inégalité suivante :

$$\iint_{P(\frac{R}{\sqrt{2}})} f(x,y)dxdy \leq \iint_{C(R)} f(x,y)dxdy \leq \iint_{P(R)} f(x,y)dxdy.$$

d) Quelle relation entre $\Gamma(p)$, $\Gamma(q)$, $\Gamma(p+q)$ et $B(p, q)$ en déduit-on pour $p \geq 1/2$ et $q \geq 1/2$?

En exprimant $B(p, q)$ en fonction de $B(p+1, q+1)$ lorsque $p > 0$ et $q > 0$, montrer que cette relation reste valable pour $p > 0$ et $q > 0$.

4°) Expression de la longueur l de (L)

a) Calculer $B(1/2, 1/2)$ et retrouver la valeur de $\Gamma(1/2)$.

En déduire la longueur l de (L) à l'aide de la fonction B, puis à l'aide de $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(3/4)$.

b) Déterminer $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)$ et exprimer $\Gamma(3/4)$ en fonction de $\Gamma(1/4)$.

En déduire la longueur l de la lemniscate de Bernoulli (L) en fonction de $\Gamma(1/4)$.

***