

Ecole de l'air - Concours 2003 - MP2

- Corrigé -

Par David Yann VINCENT - david-yann.vincent@ac-rouen.fr

Ce problème a pour sujet l'étude de la Lemniscate de Bernoulli (1654-1705).



La famille Bernoulli a constitué, dès le 17^e siècle, une véritable dynastie de mathématiciens originaires d'Anvers qui émigra à Bâle, en Suisse. Jakob, souvent traduit James par les anglophones et Jacques par les francophones, fut surnommé Jacques 1er par ces derniers. Son frère Johann (Jean), mathématicien et physicien sera Johann 1er et les fils de ce dernier Daniel 1er, Johann II, Nicolas III... Ses travaux porteront principalement sur l'analyse fonctionnelle, le calcul différentiel, le calcul intégral (le terme est de lui, en 1690, mais revendiqué aussi par Johann, et sera retenu au détriment du calcul sommatoire de Leibniz, lequel peut être considéré cependant comme le fondateur dudit calcul). Le qualificatif intégral provient du latin médiéval *integralis*, dérivant du latin *integer* = entier, (comme en anglais) pour signifier entièrement, totalement : intégralement : D'une somme d'infiniment petits, on obtient le tout.

Le mot "lemniscate" vient du latin *lemniscatus* qui signifie "orné de lemnisques" qui étaient des rubans attachés aux couronnes, aux palmes des vainqueurs et des suppliants, ou ornant la tête des convives lors d'un festin (dérivé du grec *λημνισκος*).

(Sources: Site internet ChronoMath, Gaffiot)

Partie I: Etude et construction de l'ensemble (L)

I-1 Equations cartésienne et polaire de (L)

I-1-a On a les équivalences suivantes:

$$M(x, y) \in L \iff MF_1^2 \times MF_2^2 = c^4 \iff [(c-x)^2 + y^2] \times [(-c-x)^2 + y^2] = c^4 \iff (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$$

I-1-b En faisant le changement en coordonnées polaires (r, θ), on a les équivalences suivantes:

$$M(r, \theta) \in L \iff r^4 = 2c^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \iff r^4 = 2c^2 r^2 \cos(2\theta), \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right].$$

Or, si $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$, on a: $r = 0$.

$$\text{On a donc: } M(r, \theta) \in L \iff r = a\sqrt{\cos(2\theta)} \text{ où } a = c\sqrt{2} \text{ et } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right].$$

I-2 Etude et construction de (L)

I-2-a On a: $\overrightarrow{OM}(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\vec{u}(\theta)$

Donc, pour $\theta \neq \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$, on a:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta) = \frac{-a \sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \vec{u}(\theta) + a \sqrt{\cos(2\theta)} \vec{v}(\theta)$$

Pour obtenir $\vec{T}(\theta)$, il suffit de normer $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta)$ et pour $\vec{N}(\theta)$, il suffit de dériver le vecteur $\vec{T}(\theta)$ puis de normer le vecteur obtenu. On obtient donc les résultats suivants qui demeurent vrais même si $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$:

$$\vec{T}(\theta) = -\sin(2\theta) \vec{u}(\theta) + \cos(2\theta) \vec{v}(\theta)$$

$$\vec{N}(\theta) = -\cos(2\theta) \vec{u}(\theta) - \sin(2\theta) \vec{v}(\theta)$$

Ces vecteurs s'écrivent donc dans la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\vec{T}(\theta) = -\sin(2\theta) \vec{i} + \cos(2\theta) \vec{j}$$

$$\vec{N}(\theta) = -\cos(2\theta) \vec{i} - \sin(2\theta) \vec{j}$$

I-2-b ★ L'ensemble de définition est symétrique et on a pour tout θ y appartenant:

- $r(\theta) = r(-\theta)$ donc L est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$
- $r(\pi - \theta) = r(\theta)$ donc L est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$

★ Tangente à L en $\theta = 0$:

- $M(0)$ a pour coordonnées dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$: $(c\sqrt{2}, 0)$
- $\vec{T}(0)$ a pour coordonnées dans (\vec{i}, \vec{j}) : $(0, 1)$

Donc la tangente à L en $\theta = 0$ a pour équation $x = c\sqrt{2}$.

★ Tangente à L en $\theta = \frac{\pi}{6}$:

- $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ a pour coordonnées dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$: $\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}, \frac{c}{2}\right)$
- $\vec{T}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ a pour coordonnées dans (\vec{i}, \vec{j}) : $(-1, 0)$

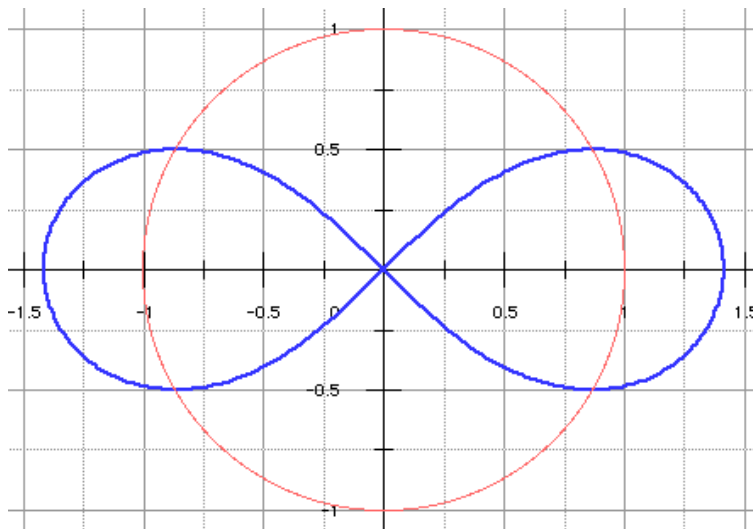
Donc la tangente à L en $\theta = \frac{\pi}{6}$ a pour équation $y = \frac{c}{2}$.

★ Tangente à L en $\theta = \frac{\pi}{4}$:

- $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a pour coordonnées dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$: $(0, 0)$
- $\vec{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ a pour coordonnées dans (\vec{i}, \vec{j}) : $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc la tangente à L en $\theta = \frac{\pi}{4}$ a pour équation $y = x$.

★ On a la représentation graphique suivante (courbe en bleu) pour $c = 1$:



I-2-c ★ Il existe plusieurs méthodes pour calculer $\phi(\theta)$. En voici une relativement simple:

- Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{6}[$, on a: $\phi(\theta) = -\text{Arctan}\left(\frac{1}{\tan(3\theta)}\right) = -\left[\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\tan(3\theta)\right] = 3\theta - \frac{\pi}{2}[\pi] = \frac{\pi}{2} + 3\theta[\pi]$.
- Si $\theta \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$, on a: $\phi(\theta) = -\text{Arctan}\left(\frac{1}{\tan(3\theta)}\right) = -\left[-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\tan(3\theta)\right] = 3\theta + \frac{\pi}{2}[\pi]$.
- Si $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{6}$, cette relation reste valable.

D'où le résultat:

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \phi(\theta) = 3\theta + \frac{\pi}{2}$$

★ La courbure $c(\theta)$ à L au point $M(\theta)$ est donnée par la formule: $c(\theta) = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

On a, pour $\theta \neq \frac{\pi}{4}$: $r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$, $r' = -\frac{a \sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$ et $r'' = -\frac{a(\cos^2(2\theta) + 1)}{(\cos(2\theta))^{\frac{3}{2}}}$.

Il vient donc, car la formule suivante reste valable pour $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], c(\theta) = \frac{3\sqrt{\cos(2\theta)}}{a}$$

★ En étudiant la fonction $\theta \mapsto c(\theta)$, il vient les résultats suivants:

- c est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- $c(0) = \frac{3}{a}$ et $c\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

En se replaçant sur l'intervalle complet d'étude, la courbure est donc maximale en $\theta = 0[\pi]$ (et elle vaut $\frac{3}{a}$); elle est minimale en $\theta = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ (et elle vaut 0).

I-3 Aire délimitée par (L) et longueur de (L)

I-3-a On a: $\mathcal{A} = 4 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos(2\theta) d\theta = 2a^2 \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$.

I-3-b On a: $l = 4 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2 \cos(2\theta) + \frac{a^2 \sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}} d\theta = 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$.

En faisant le changement de variable $2\theta = \varphi$, on a le résultat:

$$l = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi)}}$$

Remarque: il n'y a pas de problème de convergence en $\frac{\pi}{2}$ car en posant $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$ on a $\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\psi)}} \sim \frac{1}{\psi^{\frac{1}{2}}}$ en 0.

I-4 Etude de la courbe inverse de (L)

I-4-a ★ Les coordonnées polaires des points F_1 et F_2 sont: $F_1(c, 0)$ et $F_2(c, \pi)$. En appliquant l'inversion de pôle O et de rapport $a^2 = 2c^2$, leurs transformés ont les coordonnées polaires suivantes: $F'_1(2c, 0)$ et $F'_2(2c, \pi)$.

★ Comme $a < OF'_1 = 2c$, l'ensemble des points M tels que $|MF'_1 - MF'_2| = 2a$ est l'hyperbole de foyers F'_1 et F'_2 et de demi axe focal a .

★ L'équation cartésienne de cette hyperbole est donc: $x^2 - y^2 = a^2$.

I-4-b ★ Pour $\theta \neq \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$, on a: $M'(r, \theta) \in L' \iff r = \frac{a^2}{a\sqrt{\cos(2\theta)}} = \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$.

On a donc:

$$(L') : r = \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$$

★ Donc $\vec{OM}'(\theta) = \frac{a \cos(\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \vec{i} + \frac{a \sin(\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \vec{j}$.

Ainsi on a: $x^2 - y^2 = \frac{a^2 \cos^2(\theta)}{(\sqrt{\cos(2\theta)})^2} - \frac{a^2 \sin^2(\theta)}{(\sqrt{\cos(2\theta)})^2} = a^2$.

On a donc:

$$(L') : x^2 - y^2 = a^2$$

★ D'après les résultats précédents, on a donc que (L') est l'hyperbole de foyers F'_1 et F'_2 et de demi axe focal a .

Partie II: Détermination de la longueur de (L)

II-1 La fonction Gamma d'Euler

II-1-a La fonction $t \mapsto e^{-t} t^{p-1}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} . En $+\infty$, il n'y a pas de problème (la convergence est assurée par le facteur e^{-t} quelque soit p). Le problème est en 0. L'intégrale converge en 0 si $1 - p > -1$ (critère de Riemann) i.e. $p > 0$.

Donc la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{p-1}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} si et seulement si $p > 0$.

II-1-b Pour $p > 0$, $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, on a en intégrant par parties:

$$\int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^p dt = [-e^{-t} t^p]_{\varepsilon}^A + p \int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^{p-1} dt = -e^{-A} A^p + e^{-\varepsilon} \varepsilon^p + p \int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^{p-1} dt$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, on a pour tout $p > 0$,

$$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$$

II-2 La fonction Bêta d'Euler

II-2-a Pour tous p et q , la fonction $\theta \mapsto \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta)$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Appliquons le critère de Riemann pour l'intégrabilité en 0 et $\frac{\pi}{2}$:

En 0: $\theta \mapsto \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta)$ est intégrable si et seulement si $1 - 2q < 1$ i.e. $q > 0$.

En $\frac{\pi}{2}$: $\theta \mapsto \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta)$ est intégrable si et seulement si $1 - 2p < 1$ i.e. $p > 0$.

Ainsi, $\theta \mapsto \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta)$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si $p > 0$ et $q > 0$.

II-2-b Soient $p > 0$ et $q > 0$. On a, en faisant le changement de variable $\varphi - \frac{\pi}{2} = \theta$:

$$B(q, p) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2q-1}(\theta) \sin^{2p-1}(\theta) d\theta = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2q-1}(\varphi) \cos^{2p-1}(\varphi) d\varphi.$$

Or la fonction $\varphi \mapsto \sin^{2q-1}(\varphi) \cos^{2p-1}(\varphi)$ est impaire et π -périodique.

$$D'où: B(q, p) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q-1}(\varphi) \cos^{2p-1}(\varphi) d\varphi$$

Et ainsi, on a pour tous $p > 0$ et $q > 0$:

$$B(q, p) = B(p, q)$$

II-2-c ★ On a: $B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}}(\theta) \sin^{\frac{1}{2}}(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(\theta)} d\theta.$

En faisant le changement de variable $t^2 = \tan(\theta)$, il vient: $B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 2 \int_0^{+\infty} t \times \frac{2tdt}{1+t^4} = 4 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}.$

$$\star \text{ On a: } B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1+u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u\sqrt{2}}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} - \frac{u\sqrt{2}}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} du.$$

En faisant le changement de variable $t = u\sqrt{2}$, on a:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2 - 2t + 2} - \frac{t}{t^2 + 2t + 2} dt$$

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^2 + 1} + \frac{t-1}{(t-1)^2 + 1} - \frac{1}{(t+1)^2 + 1} - \frac{t+1}{(t+1)^2 + 1} dt$$

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{2} \left[\ln\left(\frac{t^2 - 2t + 2}{t^2 + 2t + 2}\right) + \text{Arctan}(t-1) - \text{Arctan}(t+1) \right]_0^{+\infty}$$

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Finalement, on a: $B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \pi\sqrt{2}$

II-2-d ★ On a pour tous $\varepsilon > 0$, $p > 0$ et $q > 0$:

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} (\cos^{2p+2q}(\theta)) \times \left(\tan^{2q-1}(\theta) \times \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) d\theta$$

D'où, en intégrant par parties:

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta = \left[\frac{\cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta)}{2q} \right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \frac{p+q}{q} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q+1}(\theta) d\theta$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a donc: pour tous $p > 0$ et $q > 0$:

$$B(p, q) = \frac{p+q}{q} B(p, q+1)$$

$$\star \text{ On a pour tous } p > 0 \text{ et } q > 0: B(p, q) = B(q, p) = \frac{p+q}{q} B(q, p+1) = \frac{p+q}{q} B(p+1, q).$$

II-2-e On a pour tous $p > 0$ et $q > 0$: $B(p, q) = \frac{p+q}{q} B(p, q+1) = \frac{p+q}{q} \times \frac{p+q+1}{p} \times B(p+1, q+1).$

II-3 Relation entre les fonctions Bêta et Gamma

II-3-a Comme on intègre sur un rectangle, on a pour tous $R > 0$, $p \geq \frac{1}{2}$ et $q \geq \frac{1}{2}$:

$$\int \int_{P(R)} f(x, y) dx dy = \int_0^R e^{-x^2} x^{2p-1} dx \times \int_0^R e^{-y^2} y^{2q-1} dy$$

En faisant les changements de variable $t = x^2$ et $t' = y^2$, on a donc:

$$\int \int_{P(R)} f(x, y) dx dy = \int_0^{R^2} \frac{e^{-t} t^{p-\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{1}{2}}} dt \times \int_0^{R^2} \frac{e^{-t'} t'^{q-\frac{1}{2}}}{2t'^{\frac{1}{2}}} dt'$$

D'où, par passage à la limite, on a pour tous $p \geq \frac{1}{2}$ et $q \geq \frac{1}{2}$:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int \int_{P(R)} f(x, y) dx dy = \frac{\Gamma(p) \times \Gamma(q)}{4}$$

II-3-b ★ Pour tous $R > 0$, $p \geq \frac{1}{2}$ et $q \geq \frac{1}{2}$:

$$\int \int_{C(R)} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) \times r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) \int_0^R e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr d\theta$$

En faisant le changement de variable $t = r^2$, il vient:

$$\int \int_{C(R)} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) \int_0^{R^2} \frac{e^{-t} t^{p+q-\frac{1}{2}}}{2} dt d\theta$$

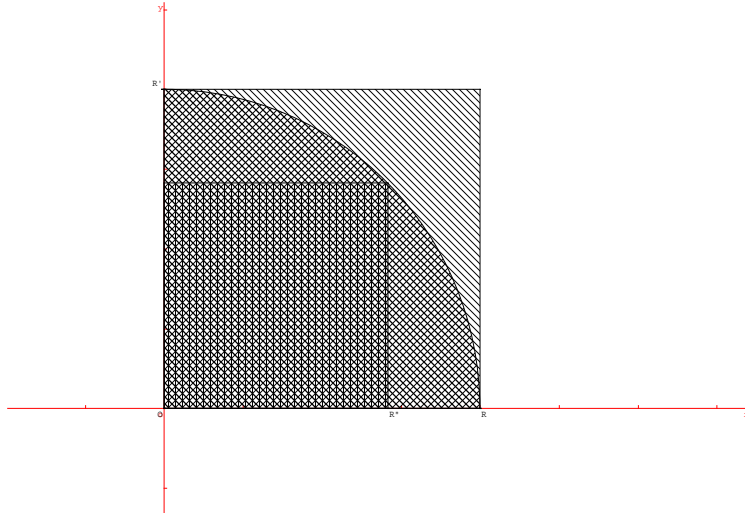
D'où, pour tous $R > 0$, $p \geq \frac{1}{2}$ et $q \geq \frac{1}{2}$:

$$\int \int_{C(R)} f(x, y) dx dy = B(p, q) \times \frac{\int_0^{R^2} e^{-t} t^{p+q-\frac{1}{2}} dt}{2}$$

★ En passant à la limite quand $R \rightarrow +\infty$, on a donc pour tous $p \geq \frac{1}{2}$ et $q \geq \frac{1}{2}$:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int \int_{C(R)} f(x, y) dx dy = \frac{B(p, q) \Gamma(p+q)}{4}$$

II-3-c ★ La figure est la suivante:



On remarque que pour tout $R > 0$, on a: $P\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) \subset C(R) \subset P(R)$.

★ Comme on intègre successivement une fonction positive sur des parties croissantes pour l'inclusion, on a donc l'inégalité suivante pour tous $R > 0$, $p \geq \frac{1}{2}$ et $q \geq \frac{1}{2}$:

$$\int \int_{P\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)} f(x, y) dx dy \leq \int \int_{C(R)} f(x, y) dx dy \leq \int \int_{P(R)} f(x, y) dx dy$$

II-3-d ★ En passant à la limite quand $R \rightarrow +\infty$, on a, d'après le théorème des gendarmes, pour tous $p \geq \frac{1}{2}$ et $q \geq \frac{1}{2}$:

$$\Gamma(p) \times \Gamma(q) = B(p, q) \times \Gamma(p + q)$$

★ Pour tous $p > 0$ et $q > 0$, on a en utilisant II-2-e:

$$\Gamma(p + q) \times B(p, q) = \Gamma(p + q) \times \frac{(p + q)(p + q + 1)}{pq} B(p + 1, q + 1)$$

Or $p + 1 > \frac{1}{2}$ et $q + 1 > \frac{1}{2}$, donc en appliquant II-3-d, on a pour tous $p > 0$ et $q > 0$:

$$\Gamma(p + q) \times B(p, q) = \Gamma(p + q) \times \frac{(p + q)(p + q + 1)}{pq} \times \frac{\Gamma(p + 1)\Gamma(q + 1)}{\Gamma(p + q + 2)}$$

Finalement, en utilisant II-1-b, on a pour tous $p > 0$ et $q > 0$:

$$\Gamma(p + q) \times B(p, q) = \Gamma(p) \times \Gamma(q) \times \frac{\Gamma(p + q)(p + q)(p + q + 1)}{\Gamma(p + q + 2)} = \Gamma(p) \times \Gamma(q).$$

Ainsi on a le résultat suivant, valable pour tous $p > 0$ et $q > 0$:

$$\Gamma(p + q)B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

II-4 Expression de la longueur l de (L)

II-4-a ★ On a: $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$.

★ On a: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \Gamma(1)$ d'après II-3-d.

$$\text{Donc: } \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi \times \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi \times [-e^{-t}]_0^{+\infty} = \pi$$

Or, comme Γ est une fonction positive, on a donc: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

★ D'après I-3-b, on a $l = a \times B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

★ En utilisant II-3-d, on a donc: $l = a \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = a \times \sqrt{\pi} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$.

II-4-b ★ D'après II-3-d, on a: $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \Gamma(1) = \pi\sqrt{2} \times 1 = \pi\sqrt{2}$

Ainsi, on a donc: $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$.

★ Il vient donc: $l = a\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi\sqrt{2}} \times \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ d'où:

$$l = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$$