Enoncé – Bac S 2004 – Maths – National

Exercice 1 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1.1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.

1.2.a. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).

1.2.b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

1.3. Déduire également de 1. une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8i$.

1.4. On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1.4.a. Déterminer l'affixe b du point B image de A par r ainsi que l'affixe c du point C image de B par r.

1.4.b. Montrer que b et c sont solutions de (E').

1.5.a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

1.5.b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

1.5.c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Exercice 2 :

On considère le suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2.1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2.2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

2.2.b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2.3. Conjecturer une expression de (u_n) en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 3 :

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 1/2 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on donne le point $S(1; -2; 0)$ et le plan P

d'équation $x+y-3z+4=0$.

3.1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$A : \begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=-3 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ $\quad B : \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ $\quad C : \begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ $\quad D : \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

3.2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$A : (-4;0;0)$ $\quad B : \left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$ $\quad C : \left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$ $\quad D : \left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3.3. La distance du point S au plan P est égale à :

$A : \frac{\sqrt{11}}{3}$ $\quad B : \frac{3}{\sqrt{11}}$ $\quad C : \frac{9}{\sqrt{11}}$ $\quad D : \frac{9}{11}$

3.4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère et du plan P est égale :

A : au point $I(1;-5;0)$

B : au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r=2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$

Exercice 4 :

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0;t[)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$.
Une étude statistique, montrant qu'environ 50% d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0;200[)=0,5$.

4.1. Montrer que $\lambda=\frac{\ln 2}{200}$.

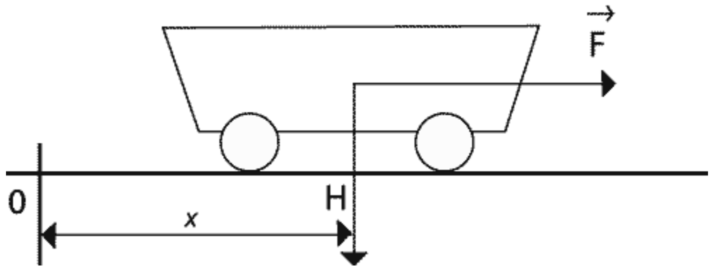
4.2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

4.3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

4.3.a. Montrer que : $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$.

4.3.b. En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

Exercice 5 :



Un chariot de masse 200kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{F}$ de valeur $50N$. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue $25N.m^{-1}.s^{-1}$. La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0; +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) : $25x' + 200x'' = 50$, où :
x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est ma dérivée seconde de x par rapport au temps t.

5.1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) : $v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$. Résoudre l'équation différentielle (F).

5.2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

5.2.a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

5.2.b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-\frac{t}{8}}$.

5.3. Calculer $V = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite V ?

5.4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Exercice 6 : *Spécialité*

6.1 Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :
$(x - 1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}) = x^k - 1$.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

6.2.a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

6.2.b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

6.3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

6.3.a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu - nv = d$.

6.3.b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que : $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)\,a^d = a^d-1$. Montrer ensuite que a^d-1 est le PGCD de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

6.3.c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

Corrigé – Bac S 2004 – Maths – National

Exercice 1 :

1.1. En développant avec le binôme de Newton, on a : $(1+i)^6 = 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1 = -8i$.

1.2.a. Posons $z_0 = (1+i)^3$. D'après 1.1., $z_0^2 = -8i$ donc $z_0 = (1+i)^3$ est solution de (E).

1.2.b. En posant $z_1 = -(1+i)^3$, on a aussi $z_1^2 = -8i$. Donc $z_1 = -(1+i)^3 = -(1+3i-3-i) = 2-2i$ est solution de (E).

1.3. Posons $z_2 = (1+i)^2$. D'après 1.1., $z_2^3 = -8i$ donc $z_2 = (1+i)^2$ est solution de (E').

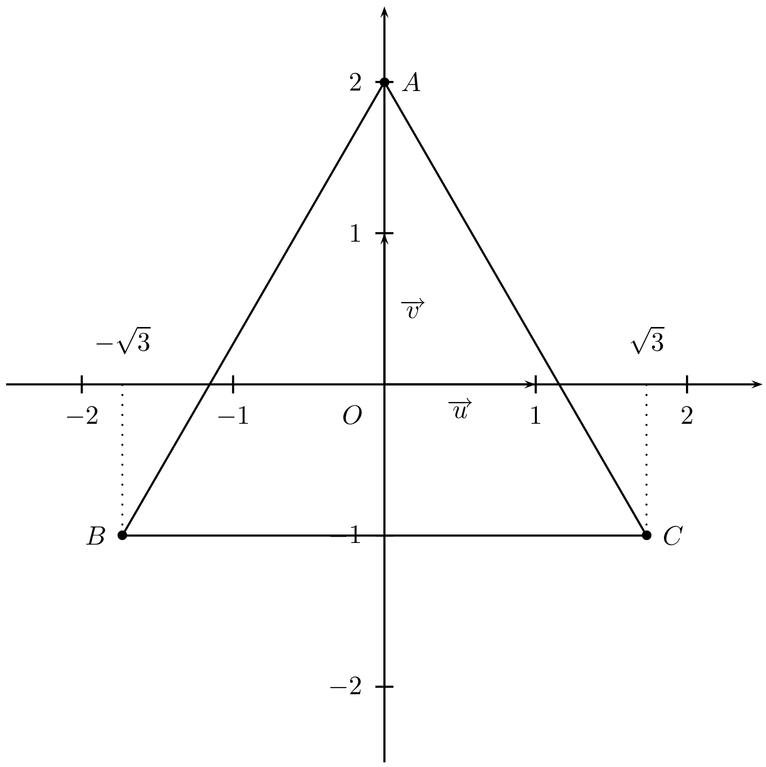
1.4.a. On a : $b = a \times e^{\frac{2\pi}{3}} = 2i \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$.

De même, on a : $c = b \times e^{\frac{2\pi}{3}} = \left(-\sqrt{3} - i\right) \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - i$.

1.4.b. On a : $b^3 = \left(-\sqrt{3} - i\right)^3 = -3\sqrt{3} - 9i + 3\sqrt{3} + i = -8i$ donc b est solution de (E').

De même, on a : $c^3 = \left(\sqrt{3} - i\right)^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$ donc c est solution de (E').

1.5.a.



1.5.b. On a : $AB^2 = |a-b|^2 = |\sqrt{3} + 3i|^2 = 3 + 9 = 12$ d'où $AB = 2\sqrt{3}$ unités graphiques. De même, on prouve que $AC = BC = 2\sqrt{3}$ unités graphiques. Donc le triangle ABC est équilatéral.

1.5.c. L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est donnée par la formule de l'isobarycentre des points A, B et C : $\frac{a+b+c}{3} = \frac{2i - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i}{3} = 0$ donc le centre de gravité du triangle ABC est le point O.

Exercice 2 :

2.1. Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2.2.a. Démontrons-le par récurrence. Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0^2$. Supposons maintenant qu'il existe n entier naturel tel que $u_n > n^2$. Au rang $n+1$, on a : $u_{n+1} > n^2+2n+3$. Or $n^2+2n+3 = (n+1)^2+2 > (n+1)^2$. Donc $u_{n+1} > (n+1)^2$. Ainsi, pour tout n entier naturel, on a bien : $u_n > n^2$.

2.2.b. On a : $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc par comparaison : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2.3. On a : $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, $u_4 = 25$, ... On peut donc conjecturer que $u_n = (n+1)^2$ pour tout n entier naturel. Démontrons-le par récurrence. Pour $n = 0$, on a : $(0+1)^2 = 1 = u_0$. Supposons maintenant qu'il existe n entier naturel tel que $u_n = (n+1)^2$. On a donc : $u_{n+1} = (n+1)^2+2n+3 = n^2+4n+4 = (n+2)^2$. Donc, on a bien pour tout entier naturel n : $u_n = (n+1)^2$.

Exercice 3 :

3.1. (D) est dirigée par un vecteur normal au plan (P) qui a donc pour coordonnées : $(1, 1, -3)$. Seules les réponses B et D peuvent convenir. Comme (D) passe par le point S, les coordonnées de celui-ci doivent vérifier les équations paramétriques pour une valeur de t donnée. $t = -1$ convient pour la réponse D. La bonne réponse est donc **la réponse D**.

3.2. (D) coupe le plan (P) en un unique point H dont le paramètre t_H vérifie l'équation : $(2+t_H)+(-1+t_H)-3(-3-3t_H)+4 = 0$ soit $t_H = -\dfrac{14}{11}$. En remplaçant dans les équations paramétriques de (D), il vient : $H\left(\dfrac{8}{11}, \dfrac{-25}{11}, \dfrac{9}{11}\right)$. La bonne réponse est donc **la réponse D**.

3.3. La distance du point S au plan (P) est donnée par la formule : $d(S,(P)) = \dfrac{|1+(-2)-3\times 0+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$. La bonne réponse est donc **la réponse B**.

3.4. (D) est perpendiculaire à (P) et la distance $SH = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$ est inférieure au rayon de la sphère qui vaut 3. Donc l'intersection du plan (P) et de la sphère est un cercle de centre H et de rayon r qui vérifie : $r^2 = 3^2 - SH^2 = \dfrac{90}{11}$. D'où, $r = 3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$. La bonne réponse est donc **la réponse B**.

Exercice 4 :

4.1. On a : $0,5 = p([0;200[) = \displaystyle\int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{200} = -e^{-200\lambda}+1$ d'où : $e^{-200\lambda} = \dfrac{1}{2}$ donc $-200\lambda = -\ln 2$ et ainsi : $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

4.2. On cherche à calculer $p([300;+\infty[) = 1 - p([0;300[)$. Or on a : $p([0;300[) = -e^{-300\lambda} + 1$ donc : $p([300;+\infty[) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{3}{2}\ln 2} = 2^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \simeq 0,35$.

4.3.a. En intégrant par parties, il vient : $\displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x}dx = -Ae^{-\lambda A} + \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^A$ d'où le résultat annoncé : $\displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

4.3.b. Comme $\lambda > 0$, on a : $-\lambda A e^{-\lambda A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ et $e^{-\lambda A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$. Ainsi $d_m = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{200}{\ln 2} \simeq 289$ semaines.

Exercice 5 :

5.1. x est solution de (E) si et seulement si v est solution de l'équation différentielle $25v + 200v' = 50$ qui est équivalente à $(F) : v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
Les solutions de (F) sont de la forme $v(t) = Ce^{-\frac{t}{8}} + K$ où C et K sont des constantes. En remplaçant dans (F) il vient que $K = 2$. Donc les solutions de (F) sont de la forme $v(t) = Ce^{-\frac{t}{8}} + 2$ où C est une constante.

5.2.a. On a : $x'(t) = v(t) = Ce^{-\frac{t}{8}} + 2$. Comme $0 = x'(0) = C + 2$, on a donc pour tout t positif : $x'(t) = -2e^{-\frac{t}{8}} + 2$.

5.2.b. En calculant une primitive de x' on trouve : $x(t) = 16e^{-\frac{t}{8}} + 2t + C'$ où C' est une constante. Comme $0 = x(0) = 16 + C'$, on a donc pour tout t positif : $x(t) = 16e^{-\frac{t}{8}} + 2t - 16$.

5.3. On a : $e^{-\frac{t}{8}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2 = V$.
On cherche t tel que $v(t) \leq 1,8$ i.e. $e^{-\frac{t}{8}} \geq 0.1$. La fonction ln étant croissante, on a donc : $-\dfrac{t}{8} \geq \ln 0,1$ soit $t \leq 8\ln 10$. Donc le chariot à une vitesse inférieure ou égale à 90% de sa valeur limite V pour t compris entre 0 et $8\ln 10$.

5.4. Il suffit de calculer $x(30) = 2 \times 30 - 16 + 16e^{-\frac{30}{8}} \simeq 44,4$ mètres.

Exercice 6 :

6.1. Supposons tout d'abord que $x = 1$. L'égalité demandée est triviale car les deux membres s'annulent. Supposons maintenant que $x \neq 1$. On a, en considérant la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison x, $1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1} = \dfrac{1 - x^k}{1 - x}$ d'où l'égalité : $(x-1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}) = x^k - 1$ qui est donc valable pour tout x et tout k non nul.

6.2.a. On a : $a^n - 1 = a^{dk} - 1 = (a^d)^k - 1$ donc $a^n - 1 = (a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + \ldots + a^{(k-1)d})$. Comme $1 + a^d + a^{2d} + \ldots + a^{(k-1)d} \in \mathbb{N}$, on a donc que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

6.2.b. Posons $a = 2$, $n = 2004$. $d = 3$ est un diviseur de 2004 donc d'après ce qui précède, $2^3 - 1 = 7$ divise $2^2004 - 1$.
$d = 6$ est un diviseur de 2004 donc d'après ce qui précède, $2^6 - 1 = 63$ divise $2^2004 - 1$.
9 est un diviseur de 63 qui est lui même un diviseur de $2^2004 - 1$. Donc 9 divise $2^2004 - 1$.

6.3.a. Comme $m' = \dfrac{m}{d}$ et $n' = \dfrac{n}{d}$, les nombres m' et n' sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe donc un couple d'entiers (u', v') tel que : $m'u' + n'v' = 1$ soit en multipliant par d, $mu' + nv' = d$. En posant $u = u'$ et $v = -v'$, on a donc : $mu - nv = d$.

6.3.b. On a : $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d = a^{nv+d}-1-a^{nv+d}+a^d = a^d-1$.
d divise mu donc a^d-1 divise $a^{mu}-1$. De même, a^d-1 divise $a^{nv}-1$. Donc a^d-1 est un diviseur commun à $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$. Soit c un diviseur commun à $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$. c divise donc $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^d-1$.
On a donc prouvé que a^d-1 est un diviseur commun à $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$ et que tout diviseur commun à $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$ divise a^d-1. On a donc que a^d-1 est le PGCD de $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$.

6.3.c. Posons : $m=21$, $u=3$, $n=30$, $v=2$. On a : $mu-nv=d=3$ qui est le PGCD de 21 et 30. D'après ce qui précède, en posant $a=2$, on a que le PGCD de $2^{63}-1$ et $2^{60}-1$ vaut 2^3-1 soit 7.